

Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 8

14 DICEMBRE 2012

1. Determinare l'immagine del rettangolo:

$$R = \left\{ z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1 \right\}$$

tramite la trasformazione conforme $z \rightarrow e^{2iz}$.

2. Si calcoli l'integrale:

$$\int_{\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$$

dove $\gamma = D$ è il cammino chiuso che racchiude il dominio $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \text{Im}(z) > 0\}$ percorso in senso antiorario.

3. Si consideri la funzione:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{(1-z)^2}$$

Si determinino i due sviluppi in serie di Laurent della f con centro in $z = 0$ e validi, rispettivamente, sui domini $0 < |z| < 1$ e $|z| > 1$.

4. Sia $a \in \mathbb{R}$. Si calcolino i valori del residuo della funzione:

$$f(z) = \frac{e^{az}}{(e^z + 1)(e^{z-1} + 1)}$$

nei punti $z = \pi i$ e $z = 1 + \pi i$.

5. Svolgere i seguenti integrali:

(a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2(x)}$;

(b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}$;

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$;

(d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 9)} dx$;

(e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1 + x^2)} dx$.

6. Studiare i diversi sviluppi di Laurent per la funzione $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ di punto iniziale $z = 0, 1, -2$.
7. Sviluppare in serie di Laurent la funzione: $f(z) = \frac{z}{4z^2+1}$ nei domini:
- (a) $|z| > 1/2$;
 - (b) $|z| < 1/2$;
 - (c) $|z - \frac{i}{2}| < 1$.
8. Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di $z = 1$ della funzione:

$$f(z) = \frac{z \sin\left(\frac{z\pi}{2}\right)}{z-1}$$

Dire in quale regione del piano complesso lo sviluppo converge e calcolare l'integrale:

$$\int_C f(z) dz$$

essendo C la circonferenza di centro $z = 1$ e raggio $R = 2$.